

Geometria

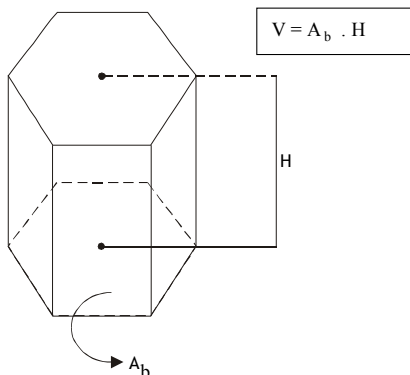
PRISMA

Prisma regular

Um prisma é regular quando suas bases são polígonos regulares.

Volume de um prisma

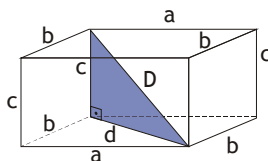
Dado um prisma de área da base A_b e altura H , onde a altura do prisma é a distância entre os planos das bases. O volume (V) pode ser encontrado pelo produto da área da base (A_b) pela altura (H), ou seja $V = A_b \cdot H$



1.1 Prismas especiais

Paralelepípedo reto – retângulo

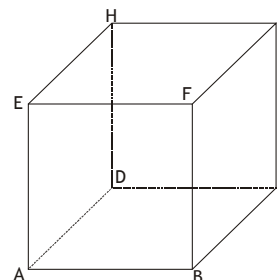
É todo prisma reto que possui todas as faces (inclusive as bases) sendo retângulos. Se a , b e c são as dimensões do paralelepípedo, temos que:



- Diagonal da base: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Diagonal do paralelepípedo: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Área da base: $AB = a \cdot b$
- Área lateral: $AL = 2bc + 2ac$
- Área total: $AT = 2(ab + ac + bc)$
- Volume: $V = a \cdot b \cdot c$
- $(a + b + c)^2 = D^2 + AT$

Cubo

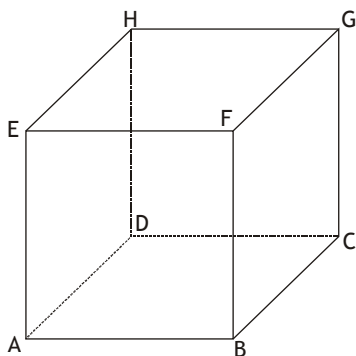
É todo prisma reto que possui todas as faces (inclusive as bases) sendo quadrados. Se a é a medida da aresta do cubo, temos que:



- Diagonal da base: $d = a\sqrt{2}$
- Diagonal do cubo: $D = a\sqrt{3}$
- Área da base: $AB = a^2$
- Área lateral: $AL = 4a^2$
- Área total: $AT = 6a^2$
- Volume: $V = a^3$
- Raio da circunferência circunscrita à base: $a = d/2$
- Raio da circunferência inscrita à base: $r = a/2$ (apótema da base)

Exercício Básico

1. Num prisma regular reto de base hexagonal, com aresta da base igual a 6 cm e altura igual a 3 cm, determine:
 - a) O esboço do prisma.
 - b) O raio da circunferência circunscrita a base.
 - c) O apótema da base.
 - d) A área da base.
 - e) A área de uma face lateral.
 - f) A área lateral.
 - g) A área total.
 - h) O volume do prisma.
2. Num cubo ABCDEFGH de aresta igual a 2 cm, determine:



a) A menor distância que deve percorrer uma formiga, que está no vértice D, e deseja ir até o vértice B.

b) O menor percurso para que uma abelha saia do vértice E, e vá até o vértice C.

c) A área de uma face do cubo.

d) A área lateral.

e) A área total.

f) O raio da circunferência circunscrita à base.

g) O raio da circunferência inscrita à base.

h) O volume.

b) $2\sqrt{3}$ cm

c) 4 cm^2

d) 16 cm^2

g) 1 cm

h) 8 cm^3

Pirâmide

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Exercícios :

1. De um tetraedro regular de aresta a , calcular :

a) A área total (A_t)

b) A medida h da altura

c) O seu volume (V)

2. Sabendo-se que a aresta de um tetraedro regular mede 3 cm, calcule a medida de sua altura, sua área total e seu volume.

Cilindro

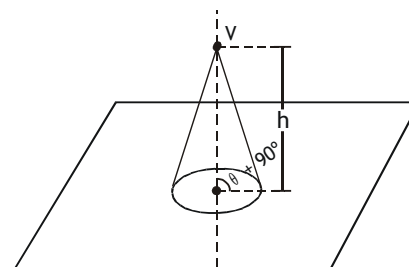
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Determine o raio de um círculo cuja área é igual à área lateral de um cilindro equilátero de raio r .

2. A área lateral de um cilindro de revolução de 10 cm de raio é igual a área da base. Calcule a altura do cilindro.

3. Calcular a medida da área lateral de um cilindro circular reto sabendo que o raio da base mede 4 cm e a geratriz 10 cm.

Cone



Exercícios Básicos

1. Dado um cone reto de raio da base r , altura h e geratriz g , determine a área da base (A_b), a área lateral (A_l), a área total (A_t), a relação entre a geratriz, a altura e o raio da base e o volume (V):

2. Um cone de revolução tem altura 4cm e raio da base 3cm. Calcule:

a) a geratriz g do cone;

Gabaritos

1.

a) e) 18 cm^2

b) 6 cm f) 108 cm^2

c) $3\sqrt{3}$ cm g) $108(1 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$

d) $54\sqrt{3}\text{ cm}^2$ h) $162\sqrt{3}\text{ cm}^2$

2. e) 24 cm^2

a) $2\sqrt{2}$ cm f) $\sqrt{2}$ cm

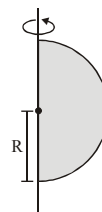
b) a área da base S ;

c) a área lateral S_ℓ ;

d) a área total S_T ;

e) o volume V ;

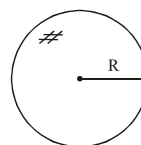
f) o ângulo central θ do setor circular obtido da planificação da superfície lateral do cone



$$S = 4\pi R^2$$

Volume de uma esfera

O volume de uma esfera é dado por:



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

EXERCÍCIOS GERAIS

1. (FORTIUM 2/2009) Seja P_1 uma pirâmide quadrangular regular. Cortamos P_1 por um plano paralelo à base e que dista da base a metade da altura de P_1 . Sejam P_2 a pirâmide menor resultante desse corte, V_1 o volume de P_1 e V_2 o volume de P_2 . Então:

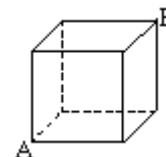
- a) não dá para comparar V_1 e V_2 c) $\frac{V_1}{8} < V_2 < \frac{V_1}{7}$
 b) $\frac{V_1}{9} < V_2 < \frac{V_1}{8}$ d) $V_1 = 8V_2$

2. (FORTIUM 2/2009) Assinale a afirmativa **VERDADEIRA**:

- a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.
 b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.
 c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.
 d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.

3. (FORTIUM 2/2009-A) Um alpinista deseja escalar uma pedra com a forma de um cubo, de 50 m de aresta. Desta forma, de acordo com a figura, partindo do ponto A e desejando colocar sua bandeira em B, caminhando pelas faces da pedra, o caminho mais curto que ele pode percorrer mede (em metros)

- a) $50(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
 b) $50\sqrt{3}$
 c) $50\sqrt{5}$
 d) $50(\sqrt{2} + 1)$



4. (FORTIUM 2/2009-A) Um tanque tem a forma de um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero e está totalmente cheio d'água. Se a aresta interna da base mede 2 m e a altura interna do prisma mede $\sqrt{3}$ m, então, quantos litros d'água devem ser retirados do seu interior para que o líquido restante ocupe os $\frac{2}{3}$ de sua capacidade?

Gabaritos

1. $A_B = \pi r^2$ $g^2 = h^2 + r^2$
 $A_\ell = \pi r g$ $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
 $A_T = \pi r(r + g)$
2. a) 5 d) 24π
 b) 9π e) 12π
 c) 15π f) $\theta = \frac{6\pi}{5}$

Esfera

Área da superfície esférica

É dada pela rotação completa de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

- a) 3.000 b) 2.000 c) 1.500 d) 1.000

5. (FORTIUM 1/2009) Um plano secciona uma esfera, determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo $36\pi \text{ cm}^2$ a área do círculo, o volume da esfera, em cm^3 , é:

- a) $288\sqrt{2}\pi$ c) 288π
b) $576\sqrt{2}\pi$ d) 576π

6. (FORTIUM 1/2009) Um cilindro circular reto tem o volume igual ao de um cubo de aresta “a” e a área lateral igual à área total do cubo. O raio e a altura desse cilindro medem, **respectivamente**:

- a) $\frac{a}{2}$ e $3\pi a$ c) $2a$ e $3\pi a$
b) $\frac{a}{3}$ e $\frac{9a}{\pi}$ d) $3a$ e $\frac{9a}{\pi}$

7. (FORTIUM 1/2009-A) A secção meridiana de um cilindro equilátero tem $4\sqrt{2}$ cm de diagonal. O volume do cilindro, em cm^3 , é de:

- a) 16π
b) 24π
c) 32π
d) 54π

8. (FORTIUM 1/2009-A) A base de um prisma quadrangular regular está inscrita numa circunferência cujo círculo tem $100\pi \text{ cm}^2$ de área. Se a altura do prisma mede 1,5 cm, então o volume desse prisma, em cm^3 , é de:

- a) 200
b) 300
c) 400
d) 800

9. (FORTIUM 1/2009-A) A altura de uma pirâmide quadrangular regular é igual à aresta de sua base. Sendo B a área da base da pirâmide, então sua área lateral, em cm^2 , é:

- a) $B\sqrt{5}$
b) $\frac{B\sqrt{5}}{3}$
c) $B\sqrt{3}$
d) $\sqrt{5}B$

10. (FORTIUM 2/2009) Num cone circular reto, cujo raio da base mede r, a base é equivalente à secção meridiana. A altura desse cone mede

- a) πrg b) $\frac{\pi r}{g}$ c) πr d) πg

11. (FORTIUM 2/2009-A) Ao seccionar uma esfera, um plano determina um círculo de raio 16 cm. Se a distância do plano ao centro da esfera é de 12 cm, então o raio da esfera, em cm, vale

- a) 20
b) 28
c) 30
d) 38

12. (FORTIUM 2/2009-A) As bases de uma pirâmide hexagonal regular e de um prisma quadrangular regular acham-se inscritas num mesmo círculo. Sendo H a altura da pirâmide e sabendo-se que os dois poliedros são equivalentes, então a altura do prisma é

- a) $\frac{H\sqrt{3}}{4}$
b) $\frac{3H\sqrt{3}}{4}$
c) $\frac{H\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{H\sqrt{3}}{3}$

13. (FORTIUM 1/2010) Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de altura 6 m e raio da base 3 m. O nível da água nele contida está a uma distância do fundo do tanque igual aos $\frac{2}{3}$ da sua altura. Adotando-se $\pi = 3,14$, a quantidade de litros de água que o cilindro contém é

- a) 113.010 c) 113.050
b) 113.040 d) 113.080

14. (FORTIUM 1/2010) A aresta de um cubo e a aresta da base de um prisma triangular regular medem $4\sqrt{3}$ cm. Se o cubo e o prisma são equivalentes, então a área total do prisma, em cm^2 , é

- a) $210\sqrt{3}$ b) $212\sqrt{3}$ c) $214\sqrt{3}$ d) $216\sqrt{3}$

15. (FORTIUM 1/2010-A) A geratriz de um cilindro de revolução mede 10 cm. Qual o seu raio da base, sabendo-se que, aumentando-se esse raio em 10 cm e mantendo-se a altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do primeiro?

- a) 2,5 cm
b) $5\sqrt{2}$ cm
c) 10 cm
d) 20 cm

16. (FORTIUM 1/2010-A) A área lateral de um prisma hexagonal regular de 25 cm de altura e de apótema da base igual a $2\sqrt{3}$ cm, em cm^2 , é

- a) 1.200 b) $600\sqrt{2}$ c) $600\sqrt{3}$ d) 600

17. (FORTIUM 1/2010-A) O volume, em cm^3 , de uma pirâmide quadrangular regular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado 4 cm, vale

- a) $16\sqrt{2}$. c) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.
b) $32\sqrt{2}$. d) $\frac{32\sqrt{2}}{3}$.

18. (FORTIUM 2/2010) Um tanque cilíndrico com água tem raio da base R. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobe $\frac{9}{16}$ R . O raio da esfera é

- a) $\frac{3}{4}$ R c) $\frac{3}{5}$ R
b) $\frac{9}{16}$ R d) $\frac{R}{2}$

19. (FORTIUM 2/2010) Assinale V (verdadeiro) ou F (falso), considerando a geometria de posição espacial e plana.

- () A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessário para que as retas r e s sejam paralelas distintas.
() Duas retas que formam um ângulo reto são necessariamente perpendiculares.
() Se duas retas têm um único ponto em comum, então elas são concorrentes.
() A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que as retas r e s sejam reversas.

A seqüência correta é:

- a) V – V – V – V c) F – V – F – V
b) V – F – V – F d) F – F – F – F

20. (FORTIUM 2/2010) O maior e o menor lado de um triângulo medem, respectivamente, 10 cm e 3 cm e formam entre si um ângulo de 45° . O volume do sólido gerado pela rotação de 360° desse triângulo em torno do seu lado maior é, em cm^3 ,

- a) 30π c) 15π
b) 20π d) 10π

21. (FORTIUM 2/2010-A) A base de um prisma regular é um hexágono inscrito num círculo de raio R. Se o prisma é equivalente ao cubo, cuja base está inscrita no mesmo círculo, então a altura do prisma hexagonal, em cm, é

- a) 2R c) $\frac{4R\sqrt{6}}{3}$
b) $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$ d) $\frac{4R\sqrt{6}}{9}$

22. (FORTIUM 2/2010-A) A geratriz de um cone de revolução forma com o eixo do cone um ângulo de 45° . A área lateral, em dm^2 , desse cone, sabendo-se que a área de sua secção meridiana é 18 dm^2 , é

- a) $18\pi\sqrt{2}$ c) 18π

- b) $9\pi\sqrt{2}$ d) $18\pi(\sqrt{2} + 1)$

23. (FORTIUM 2/2010-A) Se um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio “R”, então a razão entre a área da superfície esférica e a área total do cilindro é

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{5}$

24. (FORTIUM 2/2010-A) A área da secção paralela ao eixo de um cilindro circular reto, de 8 m de altura e 1 m de raio, feita a 0,6 m do eixo, em m^2 , é

- a) 16,00 b) 12,80 c) 6,40 d) 8,60

25. (FORTIUM 1/2010) Uma caixa d’água tem a forma de paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas internas são, em m, “x”, “ $20 - x$ ” e “2”. O maior volume, em m^3 , que ela poderá conter é igual a

- a) 150 b) 200 c) 220 d) 250

26. (FORTIUM 1/2010) A geratriz de um cone de revolução mede 6 cm e o ângulo da geratriz com a altura do cone é de 30° . O volume desse cone, em cm^3 , é

- a) 9π c) $9\pi\sqrt{3}$
b) $3\pi\sqrt{3}$ d) $27\pi\sqrt{3}$

27. (FORTIUM 1/2010) Se o apótema de um tetraedro regular mede $5\sqrt{3}$ cm, então, a altura desse tetraedro, em cm, é

- a) $5\sqrt{3}$ c) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$
b) $10\sqrt{2}$ d) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

28. (FORTIUM 1/2010) Um prisma reto tem base hexagonal regular e as faces laterais quadradas. Sabendo-se que a área do círculo inscrito em sua base é igual a $25\pi \text{ cm}^2$, a área total, em cm^2 , desse prisma é

- a) 400 c) $100(2 + \sqrt{3})$
b) $100(6 + \sqrt{3})$ d) 600

29. (FORTIUM 1/2010-A) O volume, em cm^3 , de um prisma hexagonal regular com altura igual a 5 cm e com área lateral 60 cm^2 , é

- a) $5\sqrt{3}$ b) $45\sqrt{3}$ c) $30\sqrt{3}$ d) $270\sqrt{3}$

30. (FORTIUM 1/2010-A) Se um cubo está inscrito em uma esfera de $\sqrt{3}$ m de raio, então o volume do cubo, em m^3 , é igual a

- a) 8 b) 27 c) $12\sqrt{3}$ d) $24\sqrt{3}$

31. (FORTIUM 1/2010-A) Se em uma pirâmide quadrangular regular a diagonal da base mede 4 m e a aresta lateral mede 2,5 m, então o volume da pirâmide, em m^3 , é

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

32. (FORTIUM 1/2010-A) A área lateral do sólido geométrico formado pela rotação de um triângulo equilátero, de perímetro 30 cm, em torno de um de seus lados é, em cm^2 , igual a

- a) 100π c) $50\pi\sqrt{3}$
b) 200π d) $100\pi\sqrt{3}$

33. (FORTIUM 2/2010) Um barril, cuja forma é a de um cilindro reto, está repleto de vinho. Este vinho deve ser distribuído em copos cilíndricos de altura igual a $1/8$ da altura do barril, e de diâmetro da base igual a $1/5$ do diâmetro da base do barril. A quantidade de copos necessária para distribuir todo o vinho é

- a) 400 b) 300 c) 200 d) 100

34. (FORTIUM 2/2010) Se uma das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo é 6 cm, a soma das outras duas dimensões é 25 cm e a área total é 600 cm^2 , então a razão entre as duas dimensões desconhecidas é

- a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{2}{5}$

35. (FORTIUM 2/2010) Num triângulo ABC, o lado maior \overline{AC} mede 10 cm; o lado menor \overline{BC} mede 3 cm; e o ângulo que eles formam mede 45° . O volume do sólido gerado pela rotação de 360° desse triângulo em torno do lado maior, em cm^3 , é

- a) $\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{2}$
b) $3\sqrt{2}\pi$ d) 15π

36. (FORTIUM 2/2010) Num retângulo ABCD, os vértices A, B, C e D são consecutivos. Marcam-se na base \overline{AB} , a partir de A, três pontos, E, F e G, de modo que eles assinalem, respectivamente, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da base \overline{AB} . A razão entre as áreas do triângulo CEF e do retângulo ABCD é

- a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{10}$

37. (FORTIUM 2/2010-A) Seja V o volume de um cubo de aresta "a". Constrói-se um prisma quadrangular de volume V' e de vértices nos pontos médios das arestas das bases do cubo. O volume V' desse prisma é igual a

- a) $\frac{V}{2}$ c) $\frac{V}{3}$
b) V d) $\frac{V}{4}$

38. (FORTIUM 1/2010) Um prisma regular de base triangular tem altura igual ao lado da base e volume igual a $16\sqrt{3}\text{ cm}^3$. A área lateral desse prisma, em cm^2 , é

- a) 24 b) 8 c) 4 d) 48

39. (FORTIUM 1/2010) Um vaso tem formato de um cilindro reto, de 16 cm de altura interna e 6 cm de diâmetro interno. Ele contém água até $\frac{1}{3}$ de sua altura. Acrescentando-se uma quantidade de água equivalente ao volume de uma esfera de 6 cm de diâmetro, o nível da água subirá

- a) 3 cm b) 4 cm c) 5 cm d) 6 cm

40. (FORTIUM 1/2010) No tronco de cone reto, as bases são paralelas. Se o raio da base maior mede 5 cm e a distância entre as duas bases, $4\sqrt{3}$ cm, então o volume desse tronco de cone, em cm^3 , é

- a) $\frac{124\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $125\pi\sqrt{3}$ c) $\frac{124\pi\sqrt{3}}{3}$ d) $124\pi\sqrt{3}$

41. (FORTIUM 1/2010-A) Sejam dois cones, A e B, de volumes V e V', respectivamente. Se as razões entre os raios das bases e entre as alturas de A e B são, respectivamente, 2 e $\frac{1}{2}$, então podemos afirmar

- que
a) $V' = V$ c) $V' = 2V$
b) $V = 2V'$ d) $V = 3V'$

42. (FORTIUM 1/2010-A) Num cone reto, o raio da base mede 3 cm. Para que os números que expressam as medidas do raio da base, da altura e do volume desse cone formem, nessa ordem, uma P.G., a altura, em cm, deve ser

- a) $3\pi\sqrt{3}$ b) $\pi\sqrt{3}$ c) π d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

43. (FORTIUM 1/2010-A) Um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado k, tem volume igual ao de um cubo de aresta k. A altura do prisma é igual a

- a) $\frac{4k\sqrt{3}}{3}$ b) $k\sqrt{3}$ c) $\frac{3k\sqrt{3}}{4}$ d) $4k\sqrt{3}$

44. (FORTIUM 1/2010-A) Numa pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede 3 cm. Se a área lateral dessa pirâmide é 36 cm^2 , então o volume da pirâmide, em cm^3 , é igual a

- a) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{9\sqrt{111}}{4}$ c) $\frac{9\sqrt{111}}{2}$ d) $9\sqrt{2}$

45. (FORTIUM 2/2010) A soma das medidas dos ângulos internos de uma face do dodecaedro regular é igual a

- a) 180° c) 540°
b) 360° d) 720°

46. (FORTIUM 2/2010) A área de uma secção plana, feita a uma distância de 21 cm do centro de uma esfera de 29 cm de raio, em cm^2 , está compreendida entre

- a) 1230 e 1240. c) 1250 e 1260.
b) 1240 e 1250. d) 1260 e 1270.

47. (FORTIUM 2/2010) Paula recortou de uma folha de papel crepom um setor circular, de raio 3 cm e comprimento aproximadamente igual a 10 cm, para cobrir exatamente a superfície lateral de um cone de madeira. A base desse cone tem área, em cm^2 , aproximadamente igual a

- a) 11 b) 10 c) 9 d) 8

Gabarito

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
D	C	C	D	B	B	A	B	A	C	A	A	B
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
D	C	D	D	A	B	C	D	A	C	B	B	C
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
C	C	C	A	D	D	C	A	D	C	A	D	B
40	41	42	43	44	45	46	47					
A	B	B	A	B	C	C	D					