1º encontro:	5. Análise combinatória. 13.1. princípios de contagem; 13.2. permutações; 13.3. arranjos e combinações.
2º encontro:	13. Probabilidade: 1 14. Probabilidade e eventos independentes.
3º encontro:	20. Compreensão de estrutura lógica de relações arbitrárias entre pessoas, lugares, objetos ou eventos fictícios. 21 . Dedução de novas informações das relações fornecidas e avaliar as condições usadas para estabelecer a estrutura daquelas relações. 22. Compreensão e elaboração da lógica das situações por meio de raciocínio verbal. 24. Raciocínio sequencial. 25. Orientações espacial e temporal. 26. Formação de conceitos. 27. 28. Diagramas lógicos. 29. Discriminação de elementos. 30.Compreensão do processo lógico que, a partir de um conjunto hipóteses, conduz, de forma válida, a conclusões determinadas. 31. Analogia, inferências e conclusões.
4º encontro:	Raciocínio matemático (que envolva, entre outros, conjuntos numéricos racionais e reais – operações, propriedades e problemas envolvendo as quatro operações nas formas fracionária e decimal; numéricos complexos; números e grandezas proporcionais; razão e proporção; divisão proporcional; regra de três simples e composta; porcentagem).

Análise Combinatória e Probabilidade

Análise Combinatória

Princípio Multiplicativo

Sendo A um acontecimento que pode ocorrer de n modos distintos e para cada uma das **n** maneiras de ocorrer A, um segundo acontecimento B pode ocorrer de p modos distintos. Então, o número de maneiras de ocorrer A e B é n . p.

Princípio Aditivo

Sendo A um acontecimento independente do acontecimento B, se A pode ocorrer de n modos distintos e B pode ocorrer de p modos distintos, então o número de maneiras de ocorrer A ou B é n + p.

Fatorial

Sendo $n \in IN$, temos:

0! = 1 (Lê-se zero fatorial)

1! = 1 (Lê-se um fatorial)

Para $n \geq 2$: n! = 1 . 2 . 3 . … . n (Lê-se n fatorial)

Arranjo Simples

Dado um conjunto A, formado por n elementos, e sendo p um número inteiro e positivo, tal que $p \leq n$, chama-se arranjo simples dos n elementos dados, tomados p a p, a qualquer seqüência de p elementos distintos, formada com elementos de A.

$$\boxed{A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Permutação simples

Dado um conjunto A, formado por n elementos, chama-se permutação simples dos n elementos dados a qualquer arranjo simples dos n elementos dados, tomando n a n.

$$\boxed{P_n = A_{n,n} = n!}$$

Combinação simples

Dado um conjunto A, formado por n elementos, e sendo p um número inteiro positivo, tal que $p \leq n$ chama-se de combinação simples dos n elementos dados, tomados p a p, a qualquer subconjunto de p elementos distintos, formado com elementos de A.

$$\boxed{C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Agrupamento com repetição

Permutação com elementos repetidos

O número de permutações com repetição de n elementos com: α_1 elementos iguais a a_1; α_2 elementos iguais a a_2; α_3 elementos iguais a a_3; …; α_k elementos iguais a a_k. Será dado por:

$$\boxed{P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \frac{P_n}{P_{\alpha_1}\cdot P_{\alpha_2}\cdot\ldots P_{\alpha_k}} = \frac{n!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\ldots\cdot\alpha_k!}}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n)$$

Arranjos com elementos repetidos

Um arranjo com repetição dos n elementos dados, tomados p a p, é uma seqüência de p elementos tal que:

⇨ para a escolha do 1º elemento há n possibilidades;

⇨ para a escolha do 2º elemento há n possibilidades;

⇨ e assim por diante.

Concluímos que:

$$(AR)_{n,p} = A'_{n;p} = A_{n;p} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{p \text{ fatores}} = n^p$$

Combinações com repetições (ou completas)

Seja C = {a, b, c}, as combinações completas tomadas 2 a 2 são: aa, ab, ac, bb, bc e cc. Se fosse combinação simples, os agrupamentos tomados 2 a 2 seriam apenas ab, ac e bc.

O número de combinações com repetições de n elementos tomados p a p (ou classe p) é dado por:

$$(CR)_{n;p} = C_{n+p-1;p} = \binom{n+p-1}{p}$$

Permutações circulares

Se os elementos a serem permutados estiverem em disposição circular, as permutações simples de tais elementos não são todas distintas. Neste caso, torna-se necessário fixar um dos n elementos e permuta-se os n – 1 elementos restantes.

$$P'_n = (PC)_n = (n-1)!$$

Exercícios

1. Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.
R= 120

2. Há quatro estradas ligando as cidades A e B, e três estradas ligando as cidades B e C. de quantas maneiras distintas pode-se ir de A a C, passando por B? **R = 12**

3. Quantos veículos podem ser emplacados num sistema em que cada placa é formada por 2 letras (de um total de 26) e 4 algarismos (de 0 a 9)? **R = 6.760.000**

4. Quantos veículos podem ser emplacados num sistema em que cada placa é formada por 3 letras (de um toal de 26) e 4 algarismos (do 0 a 9)? **R = 175.760.000**

5. De quantas maneiras podemos arrumar 5 pessoas em fila indiana? **R = 120**

6. Um edifício tem 16 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente de que usou para entrar? **R = 240**

7. Em um baralho de 52 cartas, três são escolhidas sucessivamente. Quantas são as seqüências de resultados possíveis se a escolha for feitas com reposição? **R = 140.608**.

8. Em um baralho de 52 cartas, três são escolhidas sucessivamente. Quantas são as seqüências de resultados possíveis se a escolha for feitas sem reposição? **R = 132.600**.

9. Uma prova de Matemática contém dez questões do tipo múltipla escolha, tendo cada questão cinco alternativas. Se todas as questões forem respondidas ao acaso, qual o número de maneiras de preencher a folha de resposta? **R = 9.765.655**

10. (**UNICAMP**) Numa perua viajam 9 pessoas, das quais 4 podem dirigir. De quantas maneiras diferentes é possível acomodá-las na perua (3 no banco da frente, 3 no banco do meio e 2 no banco de trás) de forma que uma dessas 4 que dirigem ocupe o lugar da direção?

11. Quantas placas diferente de três algarismos poderão ser formadas com três algarismos, de 0 a 9, sem repeti-los na mesma placa?**R = 720**

12. Quantas bandeiras diferentes com 5 listras horizontais, podem ser feitas dispondo-se das cores verde, vermelha e preta?

Observação: Todas as listras devem ser pintadas e listras vizinhas não podem ser da mesma cor.

13. Usando todas as letras da palavra CADERNO, sem repetição, quantas “palavras” distintas se podem formar? E quantas destas “palavras” terminam por consoante?

14. Calcule quantos anagramas da palavra PALCO:
    a) começam com C.
    b) não terminam com O.

15. Qual é o número de anagramas distintos da palavra LÁPIS? **120**

16. Quantos são os anagramas distintos da palavra BRASIL? **720**

17. Quantos são os anagramas distintos da palavra CASA?

18. Quantos são os anagramas distintos da palavra ARARAQUARA?

19. Determinar o número de anagramas distintos da palavra GARRAFA.

20. Determinar o número de anagramas distintos da palavra GARRAFA, que começam pela letra A.

21. Determine o número de anagramas distintos da palavra VIOLINO.

22. Qual é o número de anagramas distintos da palavra BANANA?

23. Com os algarismos 0,1,2,3 e 6, quantos números de:

a) 3 algarismos podemos formar?

b) 3 algarismos distintos podemos formar?

24. Com os algarismos 2,3,4,5,6 e 8, quantos números ímpares de:
    a) 4 algarismos podemos formar?
    b) 4 algarismos distintos podemos formar?

25. Em uma biblioteca existem 7 portas. De quantos modos distintos essa biblioteca pode estar aberta?

26. Em um saguão de um prédio existem 7 portas. Tentando melhorar a circulação de ar no local, o zelador está testando diferentes modos de deixar as portas aberas. Ele pode deixar de 1 até 6 portas abertas, só não todas as 7 ao mesmo tempo. De quantas formas diferentes essas portas poderão ficar abertas?

27. Com relação aos anagramas da palavra ESCOLA, qual é o número:
    a) total deles?
    b) dos que começam com consoante?
    c) dos que começam e terminam com vogal?
    d) dos que mantêm as letras E,S,A juntas e nessa ordem?
    e) dos que mantêm as vogais juntas?

28. Com relação aos anagramas da palavra ESTADO, qual é o número:
a) total deles?
b) dos que começam com consoante?
c) dos que começam com vogal?
d) dos que mantêm as letras E, S, A juntas e nesta ordem?
e) dos que mantêm as vogais juntas?

29. Qual é o número de anagramas distintos da palavra ARARA? 10

30. A diretoria de uma empresa deve ser formada a partir dos dez membros de seu conselho. A diretoria da empresa deve ser composta por: um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro, sendo que o presidente do conselho não pode ser o presidente da empresa. De quantos modos diferentes essa diretoria pode ser formada?

31. De um grupo de 10 pessoas, 5 são escolhidas para comporem uma comissão que é formada por um presidente, um vice-presidente, com um 1º secretário, um 2º secretário e um tesoureiro. Quantas comissões distintas podem ser formadas?

32. Uma comissão de três membros deve ser escolhida dentre sete pessoas. De quantos modos diferentes se pode escolher a comissão, sabendo que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?

33. Uma comissão de quatro homens e três mulheres deve ser escolhida dentro de seis homens e cinco mulheres. De quantos modos diferentes pode-se escolher comissão, sabendo-se que os membros dessa comissão terão funções idênticas?

34. Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maça, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco, usando-se três frutas distintas.

35. O setor de emergência de uma unidade do Unicor tem três médicos e oito enfermeiros. A direção do Unicor deverá formar equipes de plantão constituídos de um médico e três enfermeiros. O número de equipes diferentes possível é:
    a) 168 b) 3 c) 56 d) 24 e) 336

36. (**Unesp-SP**) O setor de emergência de um hospital conta, para os plantões noturnos, com 3 pediatras, 4 clínicos gerais e 5 enfermeiros. As equipes de plantão deverão ser constituídas por 1 pediatra, 1 clínico geral e 2 enfermeiros. Determine:
    a) quantos pares distintos de enfermeiros podem ser formados
    b) quantas equipes de plantão distintas podem ser formadas.

37. Dentre seis senadores e cinco deputados será escolhida uma comissão de três senadores e dois deputados. De quantas maneiras diferentes essa comissão pode ser formada?
    a) 200 b) 100 c) 80 d) 50 e) 40

38. Com 6 rapazes e 6 moças, quantas comissões de 5 pessoas podemos formar tendo em cada uma delas:
    a) 2 rapazes e 3 moças?
    b) pelo menos 3 moças?

39. Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ele lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não têm algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é:
    a) 1.680 **b) 1.344** c) 720 d) 224 e) 136

40. Num grupo de 5 pessoas duas são irmãs. O número de maneiras distintas que elas podem ficar em fila, de maneira que as duas fiquem sempre juntas, é igual a:
    a) 24 b) 48 c) 120 d) 240 e) 420

41. Quantas comissões distintas de cinco pessoas podem ser formadas a partir de uma equipe com oito membros, sendo que em cada comissão sempre devem estar presentes as pessoas A e B?

42. Quantas comissões distintas de cinco pessoas podem ser formadas a partir de uma equipe com oito membros, sendo que em cada comissão nunca devem estar presentes as pessoas A e B?

43. Existem 4 estradas de rodagem e 3 estradas de ferro entre as cidades A e B. quantos são os diferentes percursos para fazer a viagem de ida e volta entre A e B, utilizando rodovia e trem, obrigatoriamente, em qualquer ordem?
    a) 4! X 3!
    b) 2^{-1}x 4! x 3!
    c) 24
    d) 12
    e) 7

44. (**MACK**) Com os algarismos 1,2,3,4,5 e 6 são formados números de quatro algarismos distintos. Dentre eles, serão divisíveis por 5:
    a) 20 números
    b) 30 números
    c) 60 números
    d) 120 números
    e) 180 números

45. (**FCC**) Uma prova compõe-se de 20 questões do tipo múltipla escolha, tendo cada uma 4 alternativas distintas. Se todas as 20 questões forem respondidas ao acaso, o número máximo de maneiras de preencher a folha de respostas será:
a) **4^{20}**
b) 2^{20}
c) 20^{4}
d) 160
e) 80

46. (**MACK**) Em um teste de múltipla escolha, com 5 alternativas distintas, sendo uma única correta, o número de modos distintos de ordenar as alternativas de maneira que a única correta não seja nem a primeira nem a última é:
a) 36
b) 48
c) 60
d) 72
e) 120

47. (**UFT**) O número de maneiras que 4 italianos e 2 americanos podem se sentar numa fila, de modo que as pessoas de mesma nacionalidade fiquem juntas, é:
a) 30
b) 48
c) 96
d) 720

48. (**UFT**) Uma empresa tem 5 diretores e 10 gerentes. Quantas comissões distintas podem ser formadas, constituídas de 1 diretor e 4 gerentes?
a) 210
b) 126.000
c) 23.200
d) 1.050
e) 150.00

49. (UDF) Numa classe há 10 rapazes e 6 moças. Quantas comissões de 4 rapazes e 2moças podem ser formadas?
a) 40
b) 320
c) 480
d) 3.150

50. (**FAAP**) Uma sociedade tem um conselho administrativo formado por 12 membros, sendo ¾ brasileiros e os demais estrangeiros. Quantas comissões de 5 conselheiros podem ser formadas com 3 brasileiros? **252**

51. (**ESAF TFC**) Em um campeonato participam 10 duplas, todas com a mesma probabilidade de vencer. De quantas maneiras diferentes poderemos ter a classificação para os três primeiros lugares?
a) 240
b) 270
c) 420
d) 720
e) 740

52. (**ESAF – MPU 2004**) Quatro casais compram ingressos para oito lugares contíguos em uma mesma fila no teatro. O número de diferentes maneiras em que podem sentar-se de modo que a) homens e mulheres sentem-se em lugares alternados, e que b) todos os homens sentem-se juntos e que todas as mulheres sentem-se juntas, são, respectivamente,
a) 1.112 e 1.152
b) 1.152 e 1.100
c) 1.152 e 1.152
d) 384 e 1.112
e) 112 e 384

53. (**ESAFMPOG 2005**) Pedro e Paulo estão em uma sala que possui 10 cadeiras dispostas em uma fila. O número de diferentes formas pelas quais Pedro e Paulo podem escolher seus lugares para sentar, de modo que fique ao menos uma cadeiras vazia entre eles, é igual a:
a) 80
b) 72
c) 90
d) 18
e) 56

54. (**ESAFAFRE-MG 2005**) Sete modelos, entre elas Ana, Beatriz, Carla e Denise, vão participar de um desfile de modas. A promotora do desfile determinou que as modelos não desfilarão sozinhas, mas sempre em filas formadas por exatamente quatro modelos. Além disso, a última de cada fila só poderá ser ou Ana, ou Beatriz, ou Carla ou Denise. Finalmente, Denise não poderá ser a primeira da fila. Assim, o número de diferentes filas que podem ser formadas é igual a:
a) 420
b) 480
c) 360
d) 240
e) 60

55. (**ESAF AFT 2006**) Quer-se formar um grupo de dança com 9 bailarinas, de modo que 5 delas tenham menos de 23 anos, que uma delas tenha exatamente 23 anos, e que as demais tenha, idade superior a 23 anos. Apresentaram-se, para a seleção, quinze candidatas, com idades de 15 a 29 anos, sendo a idade, em anos, de cada candidata, diferentes das demais. O número de diferentes grupos de dança que podem ser selecionadas a partir deste conjunto de candidatas é igual a,
a) 120
b) 1220
c) 870
d) 760
e) 1.120

56. (**ESAF TCU – 2000**) A senha para um programa de computador consiste em uma seqüência LLNNN, onde “L” representa uma letra qualquer do alfabeto normal de 26 letras e “N” é um algarismo de 0 a 9. Tanto letras como algarismos podem ou não ser repetidos, mas é essencial que as letras sejam introduzidas em primeiro lugar,

antes dos algarismos. Sabendo que o programa não faz distinção entre letras maiúsculas e minúsculas, o número total de diferentes senhas possíveis é dado por:

a) $2^{26}\ 3^{10}$
b) **$26^2 10^3$**
c) $2^{26} 2^{10}$
d) 26! 10!
e) $C_{26,2}\ C_{10,3}$

57. (**ESAF AFC/STN – 2002**) Em uma cidade, os números dos telefones têm 7 algarismos e não podem começar por 0. Os três primeiros números constituem o prefixo. Sabendo-se que em todas as farmácias os quatro últimos dígitos são zero e o prefixo não tem dígitos repetidos, então o número de telefones que podem ser instalados nas farmácias é igual a:

a) 504
b) 720
c) 684
d) 648
e) 842

58. (**ESAF**) Quantas comissões compostas de 4 pessoas cada uma, podem ser formadas com 10 funcionários de uma empresa?

a) 120
b) 210
c) 720
d) 4050
e) 5040

59. (**ESAF AFTN-98**) Uma empresa possui 20 funcionários, dos quais 10 são homens e 10 são mulheres. Desse modo, o número de comissões de 5 pessoas que se podem formar com 3 homens e 2 mulheres é:

a) 5400
b) 165
c) 1650
d) 5830
e) 5600

60. (**ESAF FT – 1996**) Três rapazes e duas moças vão ao cinema e desejam sentar-se, os cinco, lado a lado, na mesma fila. O número de maneira pelas quais eles podem distribuir-se nos assentos de modo que as duas moças fiquem juntas, uma ao lado da outra, é igual a:

a) 2
b) 4
c) 24
d) 48
e) 120

61. (**ESAF GESTOR – 2000**) O número de maneiras diferentes que 3 rapazes e 2 moças podem sentar-se em uma mesma fila de modo que somente as moças fiquem juntas é igual a:

a) 6
b) 12
c) 24
d) 36
e) 48

62. (**ESAF TFC-2000**) Em uma circunferência são escolhidos 12 pontos distintos. Ligam-se quatro quaisquer destes pontos, de modo a formar um quadrilátero. O número total de diferentes quadriláteros que podem ser formados é:

a) 128
b) 495
c) 545
d) 1485
e) 11.880

63. (**ESAF ANEEL 2006**) Em um campeonato de tênis participam 30 duplas, com a mesma probabilidade de vencer. O número de diferentes maneiras para a classificação dos 3 primeiros lugares é igual a:

a) 24.360
b) 25.240
c) 24.460
d) 4.060
e) 4.650

64. (**ESAF ANEEL 2006**) Em um plano são marcados 25 pontos, dos quais 10 e somente 10 desses pontos são marcados em linha reta. O número de diferentes triângulos que podem ser formados com vértice em quaisquer dos 25 pontos é igual a:

a) 2.180
b) 1.180
c) 2.350
d) 2.250
e) 3.280

65. (**CESPE**) Para a codificação de processos, o protocolo utiliza um sistema com cinco símbolos, sendo duas letras de um alfabeto com 26 letras e três algarismos, escolhidos entre os de 0 a 9. Supondo que as letras ocupem sempre as duas primeiras posições, julgue os itens que se seguem.

1. O número de processos que podem ser codificados por esse sistema é superior 650.000. **C**
2. O número de processos que podem ser codificados por esse sistema utilizando-se letras iguais nas duas primeiras posições do código é superior a 28.000. **E**

66. (**CESPE**) Em geral, empresas públicas ou privadas utilizam códigos para protocolar a entrada e a saída de documentos e processos. Considere que se deseja gerar códigos cujos caracteres pertencem ao conjunto das 26 letras de um alfabeto, que possui apenas 5 vogais. Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

1. Se os protocolos de uma empresa devem conter 4 letras, sendo permitidas a repetição de caracteres, então podem ser gerados menos de 400.000 protocolos distintos. **C**
2. Se uma empresa decide não usar as 5 vogais em seus códigos, que poderão ter 1, 2 ou 3 letras, sendo permitida a repetição de caracteres, então é possível obter mais de 11.000 códigos distintos. **E**

3. O número total de códigos diferentes formados por 3 letras distintas é superior a 15.000. **C**

67.(**CESPE**) Conta-se na mitologia grega que Hércules, em um acesso de loucura, matou sua família. Para expiar seu crime, foi enviado à presença do rei Euristeu, que lhe apresentou uma série de provas a serem cumpridas por ele, conhecidas como **Os doze trabalhos de Hércules**. Entre esses trabalhos, encontram-se: matar o leão de Neméia, capturar a corça de Cerinéia e capturar o javali de Erimanto.

Considere que a Hércules seja dada a escolha de preparar uma lista colocando em ordem os doze trabalhos a serem executados, e que a escolha dessa ordem seja totalmente aleatória. Além disso, considere que somente um trabalho seja executado de cada vez. Com relação ao número de possíveis listas que Hércules poderia preparar, julgue os itens subseqüentes.

1. O número máximo de possíveis listas que Hércules poderia preparar é superior a 12 x 10! **C**
2. O número máximo de possíveis listas contendo o trabalho "matar o leão de Neméia" na primeira posição é inferior a 240 x 990 x 56 x 30. **C**
3. O número máximo de possíveis listas contendo os trabalhos "capturar a corça de Cerinéia" na primeira posição e "capturar o javali de Erimanto" na terceira posição é inferior a 72 x 42 x 20 x 6. **E**
4. O número máximo de possíveis listas contendo os trabalhos "capturar a corça de Cerinéia" e "capturar o javali de Erimanto" nas últimas duas posições, em qualquer ordem, é inferior a 6! x 8!. **C**

68.(**CESPE TRT 2008**) Caso 5 servidores em atividade e 3 aposentados se ofereçam como voluntários para a realização de um projeto que requeira a constituição de uma comissão formada por 5 dessas pessoas, das quais 3 sejam servidores em atividade e os outros dois, aposentados, então a quantidade de comissões distintas que se poderá formar será igual a

a) 60 **b) 30** c) 25 d) 13 e) 10

69.(**CESPE TRT 2008**) Considerando que as matrículas funcionais dos servidores de um tribunal sejam formadas por 5 algarismos e que o primeiro algarismo de todas a matrículas seja o 1 ou o 2, então a quantidade máxima de matrículas funcionais que poderão ser formadas é igual a

a) **2×10^4**
b) 2×10^5
c) 3×10^5
d) 4×10^3
e) 1×10^4

70.**(CESPE – MMA 2004)** Considere que será instalada uma torre de observação em cada uma das quatro zonas da região de preservação ambiental de um determinado estado. Sabendo que cada uma das torres será ocupada por três guardas florestais, e que estão disponíveis 30 guardas florestais para a possível ocupação das torres, julgue os itens seguintes

1. O número de equipes distintas que pode-se formar para ocupar uma determinada torre é inferior a 4.200. **C**
2. Se as equipes para três dessas torres já foram formadas, então o número de equipe distintas que se pode formar para ocupar a quarta torre é inferior a 1.500. **C**

71.**(CESPE – IPAJM 2006)** No departamento de eventos de uma empresa trabalham 9 homens e 6 mulheres e, para a organização da festa junina, será formada uma comissão composta de 3, dessas pessoas. Nesse caso,

1. se a comissão tiver apenas uma mulher, então será possível formar 198 comissões diferentes. **E**
2. se não houver qualquer restrição quanto ao sexo dos membros da comissão, então será possível formar 455 comissões diferentes. **C**

72.(**CESPE**)

	deputados distritais do DF	
partidos	homens	mulheres
PFL	2	1
PMDB	8	3
PP	2	–
PPS	1	–
PT	4	2
sem partido	1	–

A tabela acima apresenta a composição atual da Assembléia Legislativa do Distrito Federal. Existem atualmente 9 comissões permanentes, cada uma composta de 5 deputados distritais titulares. Considerando que qualquer parlamentar pode participar em qualquer uma dessas comissões, julgue os itens seguintes.

1. A Comissão de Constituição e Justiça pode ser formada de 23 × 22 × 21 × 4 maneiras distintas. C
2. Supondo que a Comissão de Economia, Orçamento e Finanças deva ser constituída por 3 deputados e duas deputadas, então essa comissão pode ser formada de 19 × 18 × 40 maneiras distintas. E
3. Considerando que a Comissão de Assuntos Sociais deva ser constituída tendo no máximo 2 parlamentares do PMDB, então essa comissão pode ser formada de 121 × 195 maneiras distintas. E
4. Supondo que a Comissão de Educação e Saúde deva ser formada por 2 deputadas do PMDB, 1 deputada do PT e 2 deputados ou deputadas dos demais partidos ou sem partido, então essa comissão pode ser formada de 126 maneiras distintas. C

73.(**ESAF ANEEL 2004**) Dez amigos, entre eles Mário e José, devem formar uma fila para comprar as entradas para um jogo de futebol. O número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada, de modo que Mário e José fiquem sempre juntos é igual a

a) 2! 8!

b) 0! 18!
c) 2! 9!
d) 1! 9!
e) 1! 8!

Gabarito

1. 120
2. 12
3. 6 760 000
4. 175 760 000
5. 120
6. 240
7. 140 608
8. 132 600
9. 5^{20}
10. 161280
11. 720
12. 48
13. 5040; 2880
14. 24;96
15. 120
16. 720
17. 12
18. 5040
19. 420
20. 180
21. 1260
22. 60
23. 100;48
24. 432; 120
25. 127
26. 26
27. 720; 360;144;24;144
28. 720; 360;360;24;144
29. 10
30. 4536
31. 30240
32. 35
33. 150
34. 35
35. 168
36. 10;120
37. a
38. 300; 396
39. b
40. b
41. 20
42. 6
43. c
44. c
45. a
46. d
47. c
48. d
49. d
50. 252
51. d
52. c
53. b
54. a
55. e
56. b
57. d
58. b
59. a
60. d
61. c
62. b
63. a
64. a
65. C,E
66. C,E,C
67. C,C,E,C
68. b
69. a
70. C,C
71. E,C
72. C,E,E,C
73. c

PROBABILIDADE

1. TERMOS E CONCEITOS GERAIS

1.1. Experiências aleatórias e experiências deterministas

1.1.1 Experimento Aleatório

É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso. Quando se fala de tempo e possibilidades de ganho na loteria, a abordagem envolve cálculo de experimento aleatório.

Um experimento apresenta as seguintes características fundamentais:

- ✓ É possível conhecer previamente o conjunto dos resultados possíveis;
- ✓ Não é possível prever o resultado;
- ✓ Podem repetir-se várias vezes nas mesmas condições.

1.1.2 Experimento Determinístico

Os fenômenos **deterministas** não interessam para o estudo das probabilidades. Uma experiência é **determinista** quando é possível prever o resultado que se obtém se repetida nas mesmas condições.

Exemplos:

ALEATÓRIOS	DETERMINISTAS
Jogar e ganhar na mega-sena	Atirar uma pedra ao ar e ver o que acontece
Concorrer e ganhar um concurso	Colocar dinheiro num banco e calcular o juro produzido num certo tempo
Atirar uma moeda ao ar e registar a face voltada para cima	Colocar dois produtos químicos em contacto e observar a reação
Tirar uma carta de um baralho e registar a carta saída	Deixar de regar uma planta e ver o que acontece

1.2. Definições

A) **Espaço Amostral:**

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A letra que representa o espaço amostral, é S ou Ω.

B) **Evento:**

É qualquer subconjunto do espaço amostral. Diremos que o evento se realizou quando, na realização de um experimento aleatório, o resultado obtido pertencer a esse subconjunto.

Exemplo:

Considere o experimento aleatório de lançar um dado e anotar o resultado.

O espaço amostral deste experimento é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Todos os subconjuntos formados a partir desse conjunto são chamados eventos.

Assim, por exemplo, serão eventos diferentes desse espaço amostral os seguintes subconjuntos: {5, 6}, {1, 3, 5}, {2, 4, 6}, {1, 2, 3, 4}, {6}.

Suponhamos que, tendo lançado o dado, o resultado foi **3**. Se o evento **A** for número ímpar, podemos dizer que o evento **A** ocorreu? Será que o evento **B** foi maior do que **4**?

Como podemos constatar, o número **3** aparece entre os elementos do subconjunto **A = {1,3,5}**. Por isso, dizemos que o evento **A** foi ímpar.

Ao contrário, o evento **B** não foi maior do que **4**, pois **3** não se encontra entre os elementos do subconjunto, **B = {5,6}**.

C) ***Tipos de Eventos***

Evento Certo: É o próprio espaço amostral.

Exemplo: evento A – ocorrência de um número menor que 8
A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Evento Impossível: É o subconjunto vazio do espaço amostral.

Exemplo: evento B - ocorrência de um número maior que 10
B = ∅

Evento União: É a reunião de dois eventos.

Exemplos:

evento A – ocorrência de um número impar ⇒ E = {1, 3, 5}

evento B – ocorrência de um número par primo ⇒ B = {2}

evento A ∪ B – ocorrência de um número impar ou de um número par primo ⇒ A ∪ B = {1, 2, 3, 5}

Evento Intersecção: É a intersecção de dois eventos.

Exemplos:

evento A – ocorrência de u número par ⇒ A = {2, 4, 6}

evento B – ocorrência de um número múltiplo de 4 ⇒ B = {4}

evento A ∩ B – ocorrência de um número par e múltiplo de 4 ⇒
A ∩ B = {4}

Eventos mutuamente exclusivos: São aqueles que têm conjuntos disjuntos.

Exemplos:

evento D – ocorrência de um número par ⇒ D = {2, 4, 6}

evento E – ocorrência de um número impar ⇒ E = {1, 3, 5}
D ∩ E = ∅

Eventos complementares: são dois eventos A e A' tais que:
A ∪ A' = ∪ (o evento união é o próprio espaço amostral)
A ∩ A' = ∅ (o evento intersecção é o conjunto vazio)

Exemplos:

evento A – ocorrência de número par ⇒ A = {2, 4, 6}

evento A' – ocorrência de número ímpar ⇒ A' = {1, 3, 5}

Observe que: A ∪ A' = ∪ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A ∩ A' = ∅

Exercício resolvido:

Se lançarmos um dado de 6 faces numeradas de 1 a 6 e observarmos a sua face superior:

(a) Defina o conjunto de resultados.
(b) Defina e classifique o acontecimento:
  i) *A:"sair número par";*
  ii) *B:"sair um número superior a 5";*
  iii) *C:" sair um número menor que 7";*
  iv) *D:" sair o número 7".*

Resolução:

(a) $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

(b) i) $A = \{2,4,6\}$, acontecimento composto;

ii) $B = \{6\}$, acontecimento elementar;

iii) $C = \{1,2,3,4,5,6\}$, acontecimento certo;

iv) $B = \{\ \}$ =, acontecimento impossível.

2. LEI DE LAPLACE. DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DE UM ACONTECIMENTO.

2.1. Lei de Laplace

A probabilidade de um acontecimento C é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, ou seja,

$$P(C) = \frac{\text{nº de casos favoráveis ao acontecimento C}}{\text{nº de casos possíveis}}$$

Da definição de probabilidade conclui-se que:

- A probabilidade do acontecimento certo é 1;
- A probabilidade do acontecimento impossível é 0;
- $0 \leq$ P(acontecimento qualquer) 1.

Exemplo:

O experimento consiste em extrair uma bola do interior de uma caixa e observar sua cor. Há um total de nove bolas na caixa: duas brancas, três vermelhas e quatro pretas. Qual será a probabilidade de tirar uma bola que não seja preta?

Solução

O evento tirar uma bola de cor diferente do preto, ou seja, **A = {B,V}**, consta de dois elementos.

Como foi dito na definição de probabilidade, atribuímos a cada evento um número obtido da soma das imagens de cada elemento na relação de freqüência.

Portanto, se somarmos as imagens da bola branca, **2**/9, e da vermelha, **3/9**, que aparecem na relação de freqüência deste exemplo, vamos conhecer o valor da probabilidade do evento **A**, indicado por **P(A)**.

Assim,

$$P(A) = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$$

Em alguns experimentos aleatórios, cada um dos resultados **(eventos elementares)** tem a mesma freqüência relativa esperada.

Este é o caso de lançar uma moeda ou um dado e comprovar o resultado. Dizemos, então, que o espaço amostral é equiprovável, e que sua probabilidade é uniforme.

3. PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE

P_1: A probabilidade do evento impossível é nula.
Por exemplo, se numa urna só existem bolas brancas, a probabilidade de se retirar uma bola verde (evento impossível, neste caso) é nula.

P_2: A probabilidade do evento certo é igual à unidade.

Por exemplo, se numa urna só existem bolas vermelhas, a probabilidade de se retirar uma bola vermelha (evento certo, neste caso) é igual a 1.

P_3: A probabilidade de um evento qualquer é um número real situado no intervalo real [0, 1].
Esta propriedade, decorre das propriedades 1 e 2 acima.

P_4: A soma das probabilidades de um evento e do seu evento complementar é igual a unidade.

Seja o evento **A** e o seu complementar **A'**. Sabemos que **A** U **A'** = **U**.

n(A U A') = n(U) e, portanto, n(A) + n(A') = n(U).

Dividindo ambos os membros por n(U), vem:

n(A)/n(U) + n(A')/n(U) = n(U)/n(U), de onde conclui-se:

p(A) + p(A') = 1

Nota: esta propriedade simples, é muito importante pois facilita a solução de muitos problemas aparentemente complicados. Em muitos casos, é mais fácil calcular a probabilidade do evento complementar e, pela propriedade acima, fica fácil determinar a probabilidade do evento.

P_5: Sendo A e B dois eventos, podemos escrever:

p(A U B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B)

Observe que se A ∩ B= Ø (ou seja, a interseção entre os conjuntos A e B é o conjunto vazio), então p(A U B) = p(A) + p(B).
Com efeito, já sabemos da Teoria dos Conjuntos que

n(A U B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

Dividindo ambos os membros por n(U) e aplicando a definição de probabilidade, concluímos rapidamente a veracidade da fórmula acima.
Exemplo:

Em uma certa comunidade existem dois jornais J e P. Sabe-se que 5000 pessoas são assinantes do jornal J, 4000 são assinantes de P, 1200 são assinantes de ambos e 800 não lêem jornal. Qual a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso seja assinante de ambos os jornais?
SOLUÇÃO:
Precisamos calcular o número de pessoas do conjunto universo, ou seja, nosso espaço amostral. Teremos:

n(U) = N(J U P) + N.º de pessoas que não lêem jornais.

n(U) = n(J) + N(P) – N(J ÇP) + 800

n(U) = 5000 + 4000 – 1200 + 800

n(U) = 8600

Portanto, a probabilidade procurada será igual a:

p = 1200/8600 = 12/86 = 6/43.

Logo, p = 6/43 = 0,1395 = 13,95%.

A interpretação do resultado é a seguinte: escolhendo-se ao acaso uma pessoa da comunidade, a probabilidade de que ela seja assinante de ambos os jornais é de aproximadamente 14%.(contra 86% de probabilidade de não ser).

Exm. Uma urna contém apenas bolas vermelhas, azuis, brancas e pretas. Retira-se ao acaso uma bola da urna. A probabilidade de sair uma bola vermelha é 5/17. Qual é a probabilidade de sair uma bola que não seja vermelha?

Solução. O evento não sair bola vermelha é complementar ao não sair bola vermelha.
P(A') = 1 - 5/17 = 12/17

Resumo
1. P(∅) = 0
2. P(S) = 1
3. Para todo evento A, 0,00 ≤ P(A) ≤ 1,00
4. P(A') = 1 – P(A) probabilidade complementar
5. P(A∪B) = P(A) + P(B) – P (A∩B)

"Ou" e "E"

Em probabilidade a palavra "ou" significa adição e "e" multiplicação.

Exemplos:
→ Qual a probabilidade de sair ímpar num dado? As faces podem ser 1 ou 3 ou 5.

→ Qual a probabilidade de sair uma bola branca e uma vermelha numa urna contendo 4 bolas brancas e 6 vermelhas? Obs. Muitos, talvez a maioria, das aplicações da probabilidade envolvem frases do tipo: ao menos, no máximo, menos que e mais que. Nestes casos a solução envolve a soma de dois ou mais casos.

Exercícios
Nível I

1. No lançamento de um dado, calcular a probabilidade de se obter número:
a) primo:
b) divisor de 6

2. Tirando-se, ao acaso, uma carta de um baralho comum, de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um rei?

3. Lançando-se, simultaneamente, duas moedas, calcular a probabilidade de se obterem faces de:
a) mesmo nome;
b) nomes diferentes.

4. No lançamento simultâneo de dois dados, qual a probabilidade de obter soma diferente de 11?

5. Um urna contém 6 bolas vermelhas e 4 pretas. Retirando-se ao acaso uma bola, qual é a probabilidade de ela ser:
a) Vermelha?
b) Preta?

6. Uma urna contém 6 bolas verdes, 5 azuis e 4 pretas. Calcular a probabilidade de se extrair uma bola azul ou preta.

Gabarito
Nível 1

1. 50%; 2/3
2. 4/13
3. 50%; 50%
4. 17/18
5. 60%; 40%
6. 3/5

Nível II

07 - (Cetro/Emater) Em uma corrida com 12 participantes, pode-se compor a classificação para o primeiro, segundo e terceiro colocados de quantas maneiras diferentes?
a) 210
b) 720
c) 1.020
d) 1.320
e) 2.120

Resolução:
Como a ordem dos 12 participantes importa na ordem de classificação, temos aqui um problema envolvendo arranjo entre o total de participantes e os três participantes que serão classificados em primeiro, segundo e terceiro:
$A_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1.320$ maneiras diferentes.

Alternativa d.

08 - (Cetro/DER/DF) Em todos os feriados prolongados, os acidentes nas principais rodovias do país aumentam e, por este motivo, recebem atenção especial dos agentes rodoviários. Numa determinada rodovia, constatou-se que nesses dias, entre 8 horas e 12 horas, os acidentes envolvem sempre dois veículos, conforme a tabela abaixo:

Tipo	Ocorrência	Porcentagem
1	Nenhum veículo precisa ser guinchado	60
2	Um e só um dos veículos deve ser guinchado	22
3	Os dois veículos devem ser guinchados	18

No pátio da empresa responsável pela rodovia há dois guinchos de plantão, sendo que cada um deles é capaz de rebocar um veículo de cada vez. Se num determinado instante ocorrem dois acidentes nessa rodovia, simultaneamente e de modo independente, a probabilidade de que falte guincho (isto é, de que os dois guinchos disponíveis não dêem conta de rebocar todos os veículos que necessitem de remoção) é:
a) 12,12% b) 12,06% c) 11,91% d) 11,16% e) 11,04%.

Resolução:
Se num determinado instante ocorrem dois acidentes nessa rodovia, simultaneamente e de modo independente, para que se falte guincho, teremos as seguintes situações, onde poderão ocorrer:
· Acidente tipo 3 e outro acidente tipo 3, pois nenhum veículo tipo 1 precisa ser guinchado;
· Acidente tipo 2 e outro acidente tipo 3, pois nenhum veículo tipo 1 precisa ser guinchado;
· Acidente tipo 3 e outro acidente tipo 2, pois nenhum veículo tipo 1 precisa ser guinchado.

Assim, calcularemos a probabilidade:
· Acidente tipo 3 (18% = 0,18) e outro acidente tipo 3 (18% = 0,18) = 0,18 x 0,18 = 0,0324
· Acidente tipo 2 (22% = 0,22) e outro acidente tipo 3 (18% = 0,18) = 0,22 x 0,18 = 0,0396
· Acidente tipo 3 (18% = 0,18) e outro acidente tipo 2 (18% = 0,18) = 0,18 x 0,22 = 0,0396

Como podem ocorrer a 1ª ou a 2ª ou a 3ª situação, vamos somar as situações:
0396 + 0,0396 + 0,0396 = 0,1116

Para transformarmos em porcentagem, é só multiplicar por 100:
0,1116 x 100 = 11,16%

Alternativa d.

09 - (Cetro/Hemocentro) Para etiquetar os frascos utilizados num laboratório, foi criado um código formado por 3 letras e 3 algarismos, sendo as letras apenas vogais e sendo os algarismo distintos, portanto, a quantidade de códigos é igual a:
a) 9
b) 81
c) 810
d) 9.000
e) 90.000

Resolução:
Das informações, os números deverão ter 3 algarismo e cada algarismo terá 5 possibilidades (a, e, i, o, u). Para os números que não devem se repetir, teremos 10 possibilidades na primeira casa, 9 possibilidades na segunda e 8 possibilidades na terceira:

$\underline{\ \ 5\ \ }\ \underline{\ \ 5\ \ }\ \underline{\ \ 5\ \ }\quad \underline{\ 10\ }\ \underline{\ \ 9\ \ }\ \underline{\ \ 8\ \ }$

Pelo princípio de contagem temos: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 90.000$ códigos.

Alternativa e.

10- TFC/CGU/ESAF 2008) Em um hospital, 20% dos enfermos estão acometidos de algum tipo de infecção hospitalar. Para dar continuidade às pesquisas que estão sendo realizadas para controlar o avanço deste tipo de infecção, cinco enfermos desse hospital são selecionados, ao acaso e com reposição. A probabilidade de que exatamente três dos enfermos selecionados não estejam acometidos de algum tipo de infecção hospitalar é igual a:
a) $(0,8)^3\,(0,2)^2$
b) $10\,(0,8)^2\,(0,2)^3$
c) $(0,8)^2\,(0,2)^3$
d) $10\,(0,8)^3\,(0,2)^2$
e) $(0,8)^3\,(0,2)^0$
D

11- ANA/ESAF 2009) Uma urna possui 5 bolas azuis, 4 vermelhas, 4 amarelas e 2 verdes. Tirando-se simultaneamente 3 bolas, qual o valor mais próximo da probabilidade de que as 3 bolas sejam da mesma cor?
a) 11,53%
b) 4,24%
c) 4,50%
d) 5,15%
e) 3,96%
E

12- ANA/ESAF 2009) Na população brasileira verificou-se que a probabilidade de ocorrer determinada variação genética é de 1%. Ao se examinar ao acaso três pessoas desta população, qual o valor mais próximo da probabilidade de exatamente uma pessoa examinada possuir esta variação genética?
a) 0,98%
b) 1%
c) 2,94%
d) 1,30%
e) 3,96%
C

13. TFC/CGU/ESAF 2008) Quando Paulo vai ao futebol, a probabilidade de ele encontrar Ricardo é 0,40; a probabilidade de ele encontrar Fernando é igual a 0,10; a probabilidade de ele encontrar ambos, Ricardo e Fernando, é igual a 0,05. Assim, a probabilidade de Paulo encontrar Ricardo ou Fernando é
igual a:
a) 0,04
b) 0,40
c) 0,50
d) 0,45
e) 0,95

14- AFC/CGU/ESAF 2008)Uma empresa de consultoria no ramo de engenharia de transportes contratou 10 profissionais especializados, a saber: 4 engenheiras e 6 engenheiros. Sorteando-se, ao acaso, três desses profissionais para constituírem um grupo de trabalho, a probabilidade de os três profi ssionais sorteados serem do mesmo sexo é igual a:
a) 0,10
b) 0,12
c) 0,15
d) 0,20
e) 0,24
D

15- AFC/CGU/ESAF 2008)Uma população de indivíduos é constituída 80%por um tipo genético A e 20% por uma variação genética B. A probabilidade de um indivíduo do tipo A ter determinada doença é de 5%, enquanto a probabilidade de um indivíduo com a variação B ter a doença é de 40%. Dado que um indivíduo tem a doença, qual a probabilidade de ele ser da variação genética B?
a) 1/3.
b) 0,4.
c) 0,5.
d) 0,6.
e) 2/3.
E

16-. AFC/CGU/ESAF 2008)A e B são eventos independentes se:
a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
b) $P(A \cap B) = P(A) / P(B)$.
c) $P(A \cap B) = P(A) - P(B)$.
d) $P(A \cap B) = P(A) + P(B/A)$.
e) $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.
E

17- AFC/STN/ESAF 2005)Uma grande empresa possui dois departamentos: um de artigos femininos e outro de artigos masculinos. Para o corrente ano fiscal, o diretor da empresa estima que as probabilidades de os departamentos de artigos femininos e masculinos obterem uma margem de lucro de 10% são iguais a 30 % e 20 %, respectivamente. Além disso, ele estima em 5,1% a probabilidade de ambos os departamentos obterem uma margem de lucro de 10 %. No final do ano fiscal, o diretor verificou que o departamento de artigos femininos obteve uma margem de lucro de 10%. Desse modo, a probabilidade de o departamento de artigos masculinos ter atingido a margem de lucro de 10% é igual a:
a) 17%
b) 20%
c) 25 %
d) 24 %
e) 30 %
A

18- . APO/MPO/ESAF 2008) Uma urna contém 5 bolas pretas, 3 brancas e 2 vermelhas. Retirando-se, aleatoriamente, três bolas sem reposição, a probabilidade de se obter todas da mesma cor é igual a:
a) 1/10
b) 8/5
c) 11/120
d) 11/720
e) 41/360
C

19- Carlos sabe que Ana e Beatriz estão viajando pela Europa. Com as informações que dispõe, ele estima corretamente que a probabilidade de Ana estar hoje em Paris é 3/7, que a probabilidade de Beatriz estar hoje em Paris é 2/7, e que a probabilidade de ambas, Ana e Beatriz, estarem hoje em paris é 1/7. Carlos então, recebe um telefonema de Ana informando que ela está hoje em paris. Com a informação recebida pelo telefonema de Ana, Carlos agora estima corretamente que a probabilidade de Beatriz também estar hoje em Paris é igual a:
a) 1/7
b) 1/3
c) 2/3
d) 5/7
e) 4/7

20- Quando Paulo vai ao futebol, a probabilidade de ele encontrar Ricardo é 0,40; a probabilidade de ele encontrar Fernando é igual a 0,10; a probabilidade de ele encontrar ambos, Ricardo e Fernando, é igual a 0,05. Assim, a probabilidade de Paulo encontrar Ricardo ou Fernando é igual a:
a) 0,04
b) 0,40
c) 0,50
d) 0,45
e) 0,95